第4講　数列

1　s を定数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{2a_n+s}{a_n+2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots①$$

(1)　$s=4$ とする。$a_2=$ ア，$a_{100}=$ イ である。

(2)　$s=0$ とする。$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=$ ウ である。さらに，b_n と b_{n+1} は関係式 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ を満たすから，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{\boxed{カ}}{n+\boxed{キ}}$$

である。

(3)　$s=1$ とする。$c_n=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと，$c_1=$ ク である。さらに，c_n と c_{n+1} の関係式を求め，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めることにより，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{ケ}-\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}^{\boxed{シ}}+1}$$

であることがわかる。ただし，シ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

（次ページに続く）

(4)　(3)の数列 $\{c_n\}$ について

$$\sum_{k=1}^{n} c_k c_{k+1} = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left(\boxed{\text{タ}}^{\,n} - 1\right)$$

である。

次に，(3)の数列 $\{a_n\}$ について考える。$s=1$ であることに注意して，①の漸化式を変形すると

$$a_n a_{n+1} = \boxed{\text{チ}}\,(a_n - a_{n+1}) + \boxed{\text{ツ}}$$

である。ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = \boxed{\text{テ}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{サ}}\,\boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

2　次の(Ⅰ), (Ⅱ)で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(Ⅰ)　$a_1=1$, $a_2=4$

(Ⅱ)　$n=1$, 2, 3, …に対して

$$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n=4n+2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。

(1)　$a_3=$ **アイ** である。

(2)　$\{a_n\}$ の一般項，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよう。

①の左辺は

$$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n$$
$$=(n+1)(a_{n+2}-\boxed{ウ}\,a_{n+1})-n(a_{n+1}-\boxed{ウ}\,a_n)$$

となる。よって

$$(n+1)(a_{n+2}-\boxed{ウ}\,a_{n+1})-n(a_{n+1}-\boxed{ウ}\,a_n)=4n+2$$

である。したがって，$b_n=n(a_{n+1}-\boxed{ウ}\,a_n)$ とおくと，$\{b_n\}$ の階差数列は初項 **エ**，公差 **オ** の等差数列であり，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{カ}\,n^{\boxed{キ}}$ である。ゆえに

$$a_{n+1}-\boxed{ウ}\,a_n=\frac{1}{n}\cdot\boxed{カ}\,n^{\boxed{キ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

を得る。

（次ページに続く）

$c_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，②から，$c_{n+1} -$ [ウ] $c_n =$ [ク] である。

$c_{n+1} +$ [ケ] $=$ [ウ] $(c_n +$ [ケ] $)$ により，数列 $\{c_n +$ [ケ] $\}$ は

初項 [コ]，公比 [ウ] の等比数列である。

したがって，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{サ} \cdot \boxed{シ}^{\boxed{ス}} - \boxed{セ}\,n - \boxed{ソ}$$

である。ただし，[ス] については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　①　$n-1$　②　n　③　$n+1$　④　$n+2$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{タ} \cdot \boxed{チ}^{\boxed{ツ}} - n^2 - \boxed{テ}\,n - \boxed{ト}$$

である。ただし，[ツ] については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　①　$n-1$　②　n　③　$n+1$　④　$n+2$

第４講　数列

1 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+s}{a_n+2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……………①

(1)　$s=4$ のとき．$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+4}{a_n+2}=\dfrac{2(a_n+2)}{a_n+2}=2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

したがって，$a_2=\mathbf{2}$，$a_{100}=\mathbf{2}$

(2)　$s=0$ のとき．$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$

両辺の逆数をとって，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$

よって，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\mathbf{2}$，$b_{n+1}=b_n+\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列より，

$$b_n=2+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}=\frac{n+3}{2}$$

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{n+3}{2}$ より，$a_n=\mathbf{\dfrac{2}{n+3}}$

(3)　$s=1$ のとき．$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$

$c_n=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと，$c_1=\dfrac{1+a_1}{1-a_1}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{2+1}{2-1}=\mathbf{3}$

また，$c_{n+1}=\dfrac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\dfrac{1+\frac{2a_n+1}{a_n+2}}{1-\frac{2a_n+1}{a_n+2}}$

$$=\frac{(a_n+2)+(2a_n+1)}{(a_n+2)-(2a_n+1)}=\frac{3a_n+3}{-a_n+1}=3\cdot\frac{1+a_n}{1-a_n}=3c_n$$

したがって，数列 $\{c_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列より，$c_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$

$\dfrac{1+a_n}{1-a_n}=3^n$ より，$1+a_n=3^n(1-a_n)$

$(3^n+1)a_n=3^n-1$　　よって，$a_n=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}=\dfrac{(3^n+1)-2}{3^n+1}=\mathbf{1}-\mathbf{\dfrac{2}{3^n+1}}$　（②）

(4)　$c_n=3^n$ のとき．$c_nc_{n+1}=3^n\cdot 3^{n+1}=3^{2n+1}=3\cdot(3^2)^n=3\cdot 9^n=27\cdot 9^{n-1}$

よって，数列 $\{c_nc_{n+1}\}$ は初項 27，公比 9 の等比数列より，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_kc_{k+1}$ は，等比数列 $\{c_nc_{n+1}\}$ の初項から第 n 項までの和である．

したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_kc_{k+1}=\frac{27(9^n-1)}{9-1}=\mathbf{\frac{27}{8}}(\mathbf{9}^n-1)$

次に，$s=1$ のとき，(3)より，$a_n=1-\dfrac{2}{3^n+1}$

また，① $\iff$ $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$ $\iff$ $a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$

$a_na_{n+1}+2a_{n+1}=2a_n+1$　よって　$a_na_{n+1}=\mathbf{2}(a_n-a_{n+1})+\mathbf{1}$

このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\{2(a_k-a_{k+1})+1\}$

$$\begin{aligned}&=2(a_1-a_2)+1\\&\quad+2(a_2-a_3)+1\\&\quad+2(a_3-a_4)+1\\&\qquad\vdots\\&\quad+2(a_n-a_{n+1})+1\\&=2(a_1-a_{n+1})+1\times n=2\left\{\frac{1}{2}-\left(1-\frac{2}{3^{n+1}+1}\right)\right\}+n\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}=n-1+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3^{n+1}+1}}$　（①，③）

2 $(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n=4n+2$ ……………①

(1) ①で $n=1$ のとき，$2a_3-5a_2+2a_1=6$ より，$2a_3-5\cdot4+2\cdot1=6$

よって，$a_3=\mathbf{12}$

(2) $(n+1)(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})-n(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$=(n+1)a_{n+2}-\{\alpha(n+1)+n\}a_{n+1}+\alpha na_n$

これが①の左辺と等しいのは，$\alpha=2$ のとき.

したがって，①は $(n+1)(a_{n+2}-\mathbf{2}a_{n+1})-n(a_{n+1}-2a_n)=4n+2$ と変形することができる.

$b_n=n(a_{n+1}-2a_n)$ とおくと，$b_{n+1}-b_n=4n+2$

よって，$\{b_n\}$ の階差数列は初項 **6**，公差 **4** の等差数列であり，$b_1=1\cdot(a_2-2a_1)=2$ より，

$n\geqq2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=2+\frac{(n-1)\{6+4(n-1)+2\}}{2}=\mathbf{2n^2}\quad(n=1 \text{ のときも成立})$$

ゆえに，$n(a_{n+1}-2a_n)=2n^2$ より，$a_{n+1}-2a_n=\dfrac{1}{n}\cdot2n^2$ ……………②

よって，$a_{n+1}-2a_n=2n$ ……………③

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(n+1)$ ……………④

④－③より，$a_{n+2}-a_{n+1}-2(a_{n+1}-a_n)=2$

$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$c_{n+1}-2c_n=\mathbf{2}$

よって，$c_{n+1}=2c_n+2$ ……………⑤

$\beta=2\beta+2$ ……………⑥

⑤－⑥より，$c_{n+1}-\beta=2(c_n-\beta)$ であり，⑥より，$\beta=-2$

よって，$c_{n+1}+\mathbf{2}=2(c_n+2)$，$c_1+2=(a_2-a_1)+2=5$ であることより，

数列 $\{c_n+2\}$ は初項 **5**，公比 2 の等比数列.

よって，$c_n+2=5\cdot 2^{n-1}$　つまり　$c_n=5\cdot 2^{n-1}-2$

したがって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot 2^{k-1}-2)=1+\frac{5(2^{n-1}-1)}{2-1}-2(n-1)$$

$$=\mathbf{5\cdot 2^{n-1}-2n-2}$$　（$n=1$ のときも成立）（①）

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(5\cdot 2^{k-1}-2k-2)=\frac{5(2^n-1)}{2-1}-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\mathbf{5\cdot 2^n-n^2-3n-5}$$　（②）